

# Analysis II

Konzepte in Analysis I :

- Konvergenz  $a_n \rightarrow a$  von  
Zahlenfolgen
- Eigenschaften einzelner Funktionen  $f$   
wie Stetigkeit, Diff'barkeit .....

jetzt bringt man alles zusammen, z.B.

$$\begin{cases} f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, & f_n(x) := x^n, \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

// Folge von Funktionen //

es gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  <sup>-3-</sup>

es gibt also eine punktweise Grenzfunktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Beobachtung: alle  $f_n$  sind stetig,  $f$  ist aber unstetig

Punktweise Konvergenz ist zu wenig, um gute analytische Eigenschaften der  $f_n$  auf die Grenzfunktion  $f$  zu übertragen!  $\nabla$

allgemeine Diskussion  $\rightsquigarrow$

# §13 Folgen (und Reihen) von Funktionen, Vertauschungssätze

**Def 13.1**: Seien  $f_n, f: D \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$   
mit  $D \subset \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

a)  $f_n$  konvergiert punktwise (p.w.)

gegen  $f$   $:\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$   
 $\forall x \in D$

(vgl. Bspl.) Schreibweise:  $f_n \rightarrow f$

b)  $f_n$  konvergiert gleichmäßig (glm.)

gegen  $f$   $:\Leftrightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Schreibweise:  $f_n \rightrightarrows f$

Abkürzung :

$$\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

für Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$   
(vgl. § 12). Dann gilt offenbar:

$$f_n \rightrightarrows f \iff \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

c)  $\{f_n\}$  ist gleichmäßige Cauchy-Folge

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ mit } \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

für alle  $n, m \gg N_\varepsilon$

Folgerungen :

①

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \rightarrow f$$

klar !

Umkehrung ist falsch : betrachte

$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$  - 5-  
das Eingangsbspl. und setze

$$x_n := 1 - \frac{1}{n} \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

Annahme:  $f_n \Rightarrow f$   $\left( \begin{array}{l} f(x) = \\ \left\{ \begin{array}{l} 0, x < 1 \\ 1, x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \bigtriangleup !$   
unstetig

dann gilt:

$$|f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - \underbrace{f(x_n)}_{=0}|$$

$$\leq \sup_{y \in [0,1]} |f_n(y) - f(y)| = \|f_n - f\| \rightarrow 0,$$

also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 0,$

Widerspruch, da Limes  $= 1/e$  !

②

$f_n$  glm. Cauchy - Folge auf  $D \iff$   
 $\exists$  Funktion  $f$  auf  $D$  mit  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

Beweis: " $\Leftarrow$ ": Dreiecksungleichung

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|;$$

" $\Rightarrow$ ":  $\{f_n(x)\}$  ist dann C.F. für alle

$$x \in D \Rightarrow f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existiert für alle  $x \in D$ ; somit hat man eine Grenz fkt.  $f$ ; zeige noch:  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

③ Äquivalente Beschreibungen von glm. Konv. u

$$f_n \Rightarrow f \iff$$

$\exists$  eine Nullfolge  $a_n$  mit  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$   
für alle  $x \in D$  und alle  $n \in \mathbb{N}$   $\iff$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(\underline{x_n}) - f(\underline{x_n})| = 0 \text{ für jede Folge } (x_n) \subset D$$

- 7 -

Gleichmäßige Konvergenz erhält die Stetigkeit,

genauer gilt:

**Satz 13.1**: Seien die  $f_n$  stetig in  $a \in D$

Gilt  $f_n \Rightarrow f$  auf  $D$ , so folgt

Stetigkeit von  $f$  in  $a$ .

Beweis: Gelte  $x_n \rightarrow a$ . z.z.:  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

Man hat

$$|f(x_n) - f(a)| =$$

$$|f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) - f_k(a) +$$

$$f_k(a) - f(a)| \leq$$

$$2 \|f - f_k\| + |f_k(x_n) - f_k(a)|.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Fixiere  $k \in \mathbb{N}$

mit  $\|\varphi_k - \varphi\| < \varepsilon/3$ .  $\varphi_k$  ist

stetig in  $a \implies \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(a)| < \varepsilon/3 \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Zusammen:  $|\varphi(x_n) - \varphi(a)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$



Korollar:  $\{\varphi_n\}$  Folge stetiger Funktionen,

$\sum_{h=1}^{\infty} \varphi_n$  gleichmäßig konvergent (z.B.

$\circledast \quad \|\varphi_n\| \leq \alpha_n \quad \text{mit} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ )

$\implies \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_n$  stetig

Bem: nach  $\textcircled{*}$  ist  $\sum_{n=1}^N f_n$  gleichmäßige Cauchy - Folge, also glm. konvergent. -9-

Mit 13.1 bekommt man auch ↖ für Integrale

Satz 13.2 : (Vertauschungssatz)

Gelte  $f_n \in C^0([a, b])$  mit

$f_n \Rightarrow f$ . Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$

integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Beweis: Satz 13.1  $\Rightarrow f$  stetig, also

insbesondere int'bar auf  $[a, b]$ ;

nun beachte:  $\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| =$

$$\left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \underset{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \S 12}}{\leq} \|f_n - f\| (b-a) \rightarrow 0.$$

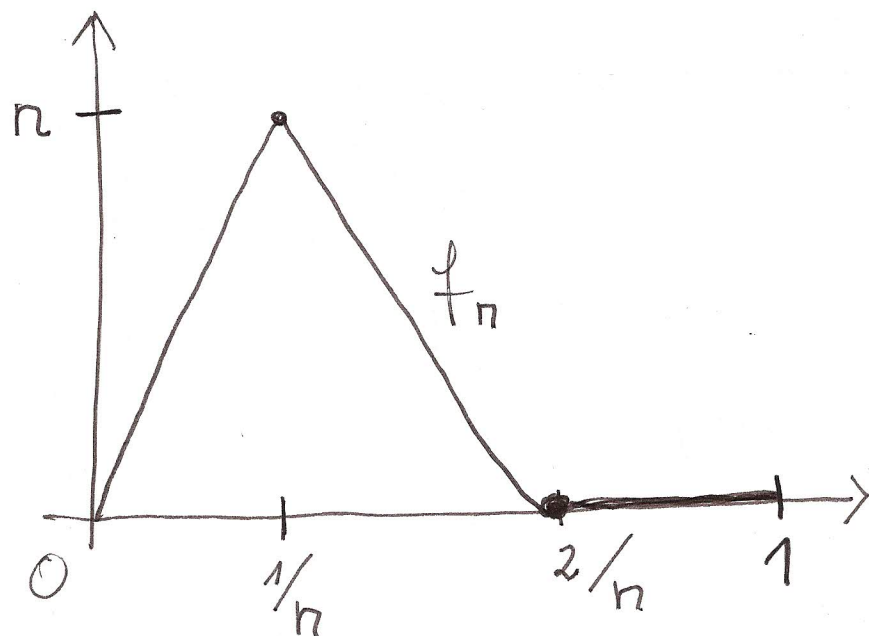
□

Bem: ① Stetigkeit von  $f_n$  kann ersetzt werden durch „ $f_n$  Regelfkt.“, denn

$\mathcal{R}([a, b])$  ist abgeschlossen bzgl. glm. Konvergenz (Satz 12.3)

② beachte: a.a.  $\int_a^b f_n(x) dx \not\rightarrow \int_a^b f(x) dx$ ,  
 falls nur  $f_n \rightarrow f$  (auch wenn alle  $f_n$  und  $f$  stetig sind!)

Beispiel: Sei  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$



$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

außerdem:  $f_n(x) \rightarrow 0 =: f(x)$   
 $\forall x \in [0, 1]$

### ③ Vertauschung bei uneigentlichen Integralen

Modellfall: Sei  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,

$$f_n \Rightarrow f \text{ auf } [0, \infty), \quad \int_0^{\infty} f_n(x) dx$$

existiert für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Frage:

Existiert dann  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  mit

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx \quad ? \quad -12-$$

i. a. // nein  $\nabla$  !

Diskussion:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x) dx \right)$$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x) dx \right) \stackrel{\text{Satz 13.2}}{=}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

unklar : Vertauschung bei " ? "

zeige: man darf vertauschen, falls

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^a f_n(x) dx - \int_0^\infty f_n(x) dx \right| \right. \\ \left. \longrightarrow 0 \text{ bei } a \rightarrow \infty \right.$$

m.a.W.: die Konvergenz

$$\int_0^a f_n(x) dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$$

muss gleichmäßig in  $n \in \mathbb{N}$  erfolgen!  $\nabla$

(noch ein "Gegen-")

Beispiel:  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$$

• zeige:  $f_n \rightrightarrows 0$  auf  $[0, \infty)$ ,

also  $f \equiv 0$

• aber :  $\int_0^{\infty} f_n(x) dx =$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x}{n} e^{-x/n} dx$$

Substitution  $t = x/n$

$$\int_0^{\infty} t e^{-t} dt$$

part. Integration

$$\left[ t \cdot (-e^{-t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

□  $\uparrow$  1. Term

## Vertauschung von Grenzübergängen mit der Ableitung

**Satz 13.3** : Sei  $f_n \in C^1([a, b])$

mit  $f_n \rightarrow f$  (also nur punktweise!)  
für eine Funktion  $f$ . Es gelte